Sayı Cisimlerinde Asal İdeal Teoremi

Hikmet Burak Özcan

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

hikmetozcan@iyte.edu.tr

Ulusal Matematik Sempozyumu 2019,
Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun

2 Eylül 2019

Genel Bakış

1. Tanımlar ve Ön Hazırlık

2. Motivasyon

3. Asal İdeal Teoremi

Tanımlar ve Ön Hazırlık

Tanım

Rasyonel sayılar cisminin bir sonlu cisim genişlemesine **sayı cismi** denir. Her sayı cismi sonlu boyutlu bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutuna, sayı cisminin **derecesi** denir.

Örnek

$$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ikinci dereceden bir sayı cismidir.

Tanım

Sıfırdan farklı tam sayı katsayılı bir polinomu sağlayan karmaşık sayılara **cebirsel sayı** denir.

Tanım

Tam sayı katsayılı tekil bir polinomu sağlayan karmaşık sayılara ise **cebirsel tam sayı** denir.

Örnek

$i \in \mathbb{Q}(i)$, bir cebirsel tam sayıdır çünkü, $X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ polinomunu sağlar. Bunun yanı sıra, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}(i)$, $2X - 1$ polinomunun kökü olduğu için bir cebirsel sayıdır. Fakat, bir cebirsel tam sayı değildir.

Tanım

α cebirsel sayısını sağlayan en küçük dereceli, tekil $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ polinomuna, α'nın **minimal polinomu** denir.

Tanım

K sayı cisminin cebirsel tam sayılar kümesine K'nın **tam sayılar halkası** denir ve $\mathcal{O}_K$ ile gösterilir.

Örnek

$\mathbb{Q}$'nun tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$'dir, yani, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

$\mathcal{O}_K$'nın Özellikleri

Derecesi n olan K sayı cismi için K'nın tam sayılar halkası $\mathcal{O}_K$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\mathcal{O}_K$ bir halkadır.
- $\mathcal{O}_K$, rankı n olan serbest bir abel gruptur.
- $\mathcal{O}_K$ bir Dedekind bölgesidir, yani, sıfırdan farklı her ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ asal ideallerin çarpımı olarak tek bir biçimde yazılır.

Tanım

K bir sayı cismi ve $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ sıfırdan farklı bir ideal olsun. $\mathfrak{a}$ idealinin $\mathcal{O}_K$ halkasındaki indeksine $\mathfrak{a}$ idealinin **normu** denir ve $N(\mathfrak{a})$ ile gösterilir.

- Sıfırdan farklı her idealin normu sonludur.
- Norm, çarpımsal bir fonksiyondur. Yani, sıfırdan farklı herhangi iki $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ ideali için
$$N(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = N(\mathfrak{a}_1)N(\mathfrak{a}_2)$$
eşitliği doğrudur.

Motivasyon

$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ asal sayılar kümesi ve

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}|$$

asal sayaç fonksiyonu olsun.
Örneğin, $\pi(10) = 5$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$. Asal sayıların sonsuzluğunun ispatı ilk kez **Öklid** tarafından *"Öklid'in Elemanları"* adlı kitabında M.Ö. 300'de sunuldu. Asal sayılar sonsuz olduğu için

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) = \infty.$$

1896'da **Jacques Hadamard** ve **Charles Jean de la Vallée Poussin** birbirlerinden bağımsız olarak **Asal Sayı Teoremi**'ni kanıtladılar. Bu teorem, asal sayaç fonksiyonu için asimptotik bir formül verir:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{log x}.$$

Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi, $\mathbb{Q}$ sayı cisminin bir tamsayılar halkası ve asal sayılar kümesi $\mathbb{P}$'yi, $\mathbb{Z}$'nin asal idealler kümesi olarak görebiliriz. Bu yüzden, asal sayaç fonksiyonu $\pi(x)$, normu x'den küçük asal ideallerin sayısını veren bir fonksiyon olarak ele alınabilir.

Soru

K bir sayı cismi, $\mathcal{O}_K$, K'nın tam sayılar halkası ve $\mathbb{P}_K$, $\mathcal{O}_K$'nın asal idealler kümesi olsun. O zaman aşağıdaki fonksiyon için asimptotik bir formül verebilir miyiz?

$$\pi_K(x) = |\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_K \mid N(\mathfrak{p}) \leq x\}|$$

Landau'nun Asal İdeal Teoremi

Teorem

K bir cismi, $\mathcal{O}_K$ onun tam sayılar halkası ve $\mathbb{P}_K$, $\mathcal{O}_K$'nın asal idealleri kümesi olsun.

$$\pi_K(x) = |\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_K \mid N(\mathfrak{p}) \leq x\}|$$

asal ideal sayaç fonksiyonu olarak tanımlayalım. O zaman, $\pi_K(x)$ için asimptotik bir formül vardır:

$$\pi_K(x) \sim x/\log(x).$$

Dedekind Zeta Fonksiyonu ve Analitik Özellikleri

Tanım

K sayı cisminin **Dedekind zeta fonksiyonu**, reel kısmı 1'den büyük karmaşık sayılar için aşağıdaki Dirichlet serisi olarak tanımlanır:

$$\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

- Eğer $\Re(s) > 1$ ise, Dedekind Zeta Fonksiyonu $\zeta_K(s)$ mutlak yakınsaktır.
- Dedekind zeta fonksiyonunun asal idealler üzerinden bir Euler çarpımı vardır:
$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$
- Dedekind zeta fonksiyonunun $\Re(s) \geq 1$ için, $s = 1$'de basit tekilliliğiyle beraber, bir analitik genişlemesi vardır.

Gauss'un Tam Sayıları için Asal İdeal Teoremi

$x \in \mathbb{R}$, $p = 4k + 3$ formunda bir asal sayı ve $p \leq \sqrt{x}$ olsun. O zaman, $\mathfrak{p} = (p)$, $\mathbb{Z}[i]$'nin bir asal idealidir ve $N(\mathfrak{p}) = p^2$.
$p = 4k + 1$ formunda bir asal sayı ve $p \leq x$ olsun. Biliyoruz ki, $4k + 1$ formunda bir asal sayı

$$p = a^2 + b^2$$

şeklinde yazılır. O zaman, $\mathfrak{p}_1 = (a + bi)$ ve $\mathfrak{p}_2 = (a - bi)$ normu p olan iki asal idealdir. Bu yüzden, Asal Sayı Teoremini kullararak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\pi_{\mathbb{Q}(i)}(x) \sim \frac{\pi(\sqrt{x})}{2} + \frac{2\pi(x)}{2} \sim \frac{x}{log(x)}.$$

Kaynakça

F. Oggier, Lecture Notes on Introduction to Algebraic Number Theory

F. Jarvis, Algebraic Number Theory, Springer, 2014

R. Murty, Problems in Analytic Number Theory, Springer, 2008

Teşekkürler.